

Bölme Halkaları Üzerinde Fonksiyonel Özdeşlikleri Keşfetmek

Münevver Pınar Eroğlu

Özet

Bir halkadaki fonksiyonel özdeşlik (FI), kabaca ifade etmek gerekirse, halkanın tüm elemanları için geçerli olan ve halka üzerinde tanımlı bazı fonksiyonları içeren bir özdeşliktir.

Bu bağlamda şu soruyu dikkate alalım:

Çarpma işleminin değişmeli olmadığı ve sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersinin bulunduğu bir bölme halkasında, negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$f(x) = x^n g(x^{-1})$$

şeklinde verilen özdeşliği hangi tür fonksiyonlar sağlar?

İlk bakışta oldukça sade görünen bu ifade, aslında toplamsal fonksiyonlar üzerinde güçlü yapısal kısıtlamalar getirir. Bu yönüyle, 1960'lardan bu yana çeşitli cebirsel yapılarda ilgiyle incelenmektedir.

Bu konuşmada, söz konusu özdeşliğin bölme halkasının karakteristiğine bağlı olarak nasıl davrandığını ele alacağız. Tüm karakteristikler için yapılan sınıflandırma, çoğu durumda tek çözümün açık biçimde ortaya çıktığını; yani f ve g fonksiyonlarının sıfır fonksiyonu olduğunu, göstermektedir. Yalnızca $n = 2$ durumunda dikkat çekici bir istisna ile karşılaşılmaktadır.

Hua özdeşliği gibi klasik yapıların yanı sıra, fonksiyonel ve genelleştirilmiş polinom özdeşliklerine dayalı tekniklerin bu problemi çözmedeki rolüne de değineceğiz.