

Bölme Halkaları Üzerinde Fonksiyonel Özdeşlikleri Keşfetmek

Münevver Pınar Eroğlu

Özet

Bir halkadaki fonksiyonel özdeşlik (FI), kabaca ifade etmek gerekirse, halkanın tüm elemanları için geçerli olan ve halka üzerinde tanımlı bazı fonksiyonları içeren bir özdeşliktir.

Bu bağlamda şu soruyu dikkate alalım:

Çarpma işleminin değişmeli olmadığı ve sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersinin bulunduğu bir bölme halkasında, negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$f(x) = x^n g(x^{-1})$$

şeklinde verilen özdeşliği hangi tür fonksiyonlar sağlar?

İlk bakışta oldukça sade görünen bu ifade, aslında toplamsal fonksiyonlar üzerinde güçlü yapısal kısıtlamalar getirir. Bu yönüyle, 1960'lerden bu yana çeşitli cebirsel yapılarda ilgiyle incelenmektedir.

Bu konuşmada, söz konusu özdeşliğin bölme halkasının karakteristiğine bağlı olarak nasıl davrandığını ele alacağız. Tüm karakteristikler için yapılan sınıflandırma, çoğu durumda tek çözümün açık biçimde ortaya çıktığını; yani f ve g fonksiyonlarının sıfır fonksiyonu olduğunu, göstermektedir. Yalnızca $n = 2$ durumunda dikkat çekici bir istisna ile karşılaşmaktadır.

Hua özdeşliği gibi klasik yapıların yanı sıra, fonksiyonel ve genelleştirilmiş polinom özdeşliklerine dayalı tekniklerin bu problemi çözmedeki rolüne de değineceğiz.

Bu çalışma, Tsiu-Kwen Lee ve Jheng-Huei Lin ile ortak yürütülmüştür.

Kaynaklar

- [1] Aczél, J., and Kossuth, L. (1964). Some unsolved problems in the theory of functional equations. *Archiv der Mathematik*, 15(1), 435-444.
- [2] Vukman, J. (1987). On additive solutions of the functional equation $f(x) = -x^2 f(x^{\{-1\}})$ in division rings. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 34, 315-319.
- [3] Beidar, K. I., Martindale, W. S., & Mikhalev, A. V. (1996). *Rings with generalized identities*. Marcel Dekker.

- [4] Argaç, N., Eroğlu, M. P., Lee, T.-K., & Lin, J.-H. (2020). Identities with inverses on matrix rings. *Linear and Multilinear Algebra*, 68(3), 635–651.
- [5] Lee, T.-K., and Lin, J.-H. (2023). Certain functional identities on division rings. *Journal of Algebra*, 647, 492–514.
- [6] Eroğlu, M. P., Lee, T.-K., & Lin, J.-H. (2024). Certain functional identities on division rings of characteristic two. *Journal of Algebra*, 657, 363–378.